A Lógica Proposicional Clássica

## Introdução: o sistema notacional

Vamos apresentar agora de maneira um pouco mais aprofundada aquele capítulo da Lógica Contemporânea conhecido pela alcunha de Lógica Proposicional Clássica (abreviadamente LPC). Nesse capítulo, assumindo os princípios lógicos clássicos da bivalência e da funcionalidade, trataremos das propriedades (e relações) lógicas cujas vigências dependem apenas da maneira como asserções mais complexas podem ser formadas a partir de asserções mais simples. Não raramente essa teoria é apresentada como uma parte da logica Quantificacional Clássica, aquela na qual se ignora a estrutura interna de asserções (por conseguinte, também o aparato dos quantificadores) (veja-se, por exemplo, (KLEENE, 1950))[[1]](#footnote-1). Todavia, a fim de salientar diferenças fundamentais entre as duas teorias, convém tratar separadamente cada uma delas. Desse modo, vamos inicialmente introduzir um sistema de notação (“linguagem”) próprio para a LPC, que designaremos como Lp, cujo léxico, dividido em categorias, é o seguinte:

1. Letras sentenciais: a letra latina tipográfica minúscula p, afetada de um índice inferior numérico;
2. Constantes sentenciais: ⊥ (Falsum) e T (verun);
3. Conectivos sentenciais (símbolos para as operações de composição sentencial): ¬ (negação), → (condicional), ∧ (conjunção), ∨ (disjunção), ↔ (bicondicional)
4. Sinais de pontuação: ( e )

Observe que as letras sentenciais formam uma classe infinita, porém enumerável (isto é, pode ser posta em correspondência unívoca com a classe dos números naturais); a enumeração dita lexicográfica é aquela dada já pelos índices das letras sentenciais.

Para o desenvolvimento da lógica proposicional, é suficiente distinguir uma única categoria de expressões bem formadas, a das fórmulas (às vezes também chamadas sentenças). Essas são definidas indutivamente através das cláusulas: (i) as expressões formadas por uma única ocorrência de símbolo e este é ou uma constante sentencial ou uma variável sentencial são fórmulas; (ii) Se A e B forem fórmulas, então ¬A, (A ∧ B), (A ∨ B), (A → B), (A ↔ B) são fórmulas.

Observemos que uma fórmula constituída por uma única ocorrência de uma determinada letra sentencial é distinta da letra sentencial que a constitui, pois enquanto aquela é uma expressão (uma sequência de símbolos, mais precisamente uma sequência unária), essa é um símbolo. No entanto, por razões de conveniência, frequentemente empregaremos a locução “letra sentencial” para designar a fórmula atômica constituída por uma única ocorrência da mencionada letra sentencial.

## A Interpretação de L

### Caracterização dos conceitos lógicos em termos de valorações.

#### Valorações como interpretações para a linguagem.

Destacamos antes, quando consideração intuitiva das noções lógicas, dois pontos importantes na consideração lógica do significado: retém-se do significado de uma expressão apenas o que é relevante para a verdade ou falsidade das asserções e trata-se o significado de uma expressão complexa como univocamente determinado pelos significados das expressões que a compõem. Vimos, agora, que na Lógica Proposicional a estrutura interna das asserções simples é desconsiderada (isto é, as consideramos como não tendo partes significativas), cuidando-se apenas dos modos de composição de sentenças mais complexas a partir de asserções mais simples. Assim, uma maneira simples de desenvolver a Lógica Proposicional Clássica é introduzir dois novos objetos abstratos (os valores de verdade: o Verdadeiro e o Falso) e considerar as fórmulas como nomes possíveis para tais objetos (ou seja, expressões que servem para designá-los). No que se segue denotaremos abreviadamente o objeto Verdadeiro por V e o objeto Falso por F. Assim, uma interpretação para a “ linguagem” ora considerada deve determinar, levando-se em conta as estruturas lógicas, os objetos (ou oV ou o F) que cada uma das fórmulas designa. Isso é realizado pelas assim chamadas valorações booleanas (também denominadas atribuições normais de valores), definidas a seguir:

DEF. Uma **valoração booleana** v é uma função que atribui a cada uma das fórmulas de Lp um e apenas um dentre os dois objetos (V ou F) e que satisfaz, adicionalmente, as seguintes condições:

1. v (T) = V
2. v (⊥) = F
3. v (¬A) = V se e apenas se não se dá que v(A) = V
4. v ( A ∧ B) = V se e apenas se v(A) = V e v(B) = V
5. v (A ∨ B) = V se e apenas se v(A) = V ou v(B) = V
6. v (A → B) = V se e apenas se v(A) =F ou v(B) = V
7. v (A ↔ B) = V se e apenas se v(A) = v(B)

O valor que uma valoração atribui a uma fórmula é dito o valor de verdade da fórmula na valoração. Diremos também que uma fórmula é verdadeira em uma valoração booleana se tal valoração atribuir-lhe o valor V. E, por último, diremos que uma valoração booleana é modelo proposicional de um conjunto de fórmulas se todas as fórmulas do conjunto forem verdadeiras na valoração em pauta.

Não é difícil perceber que valorações booleanas são univocamente determinadas pelos valores que atribuem às letras sentenciais (mais precisamente, àquelas fórmulas atômicas constituídas por uma única ocorrência de letra sentencial).

Proposição 1 Sejam v e v’ duas valorações booleanas concordes entre si no tocante a todas aos valores de letras sentenciais. Assim, v é a mesma valoração que v’. Dito de outro modo, v = v’ se e apenas se, para qualquer letra sentencial, A, v(A) = v’(A).

Ademais, o valor de verdade de uma fórmula em uma valoração resta univocamente determinado pelo valor que a valoração atribui às letras sentenciais que ocorrem na fórmula em pauta (mais precisamente, àquelas fórmulas atômicas constituídas por uma única ocorrência de letra sentencial e que são subfórmulas da fórmula em questão).

Proposição 2. Seja A uma fórmula qualquer (atômica ou molecular) e sejam v e v’ duas valorações booleanas concordes entre si no tocante a todas as letras sentenciais que ocorrem em A. Assim, v(A) = v’(A)

Assim,, dado os valores das letras sentenciais que ocorrem em uma dada fórmula, é matéria de puro “cálculo”, por assim dizer, determinar o valor da fórmula como um todo: basta calcular o valor, de acordo com as cláusulas (i) a (vi) da definição de valoração booleana, de cada uma das subfórmulas, a começar das mais simples (e, este é um processo finito, pois o número de subfórmulas de uma determinada fórmula é finito). Um exemplo permite perceber melhor o ponto. Consideremos uma valoração booleana que atribui F a todas as letras sentenciais cujo índice for impar e atribui V às demais e consideremos a fórmula

((p3 ∧ p0) ∨ (po ∧ p4) ) → ((**T** ↔ p1) ∨ p3)

As suas subfórmulas são, em ordem de complexidade,

p0

p1

p3

p4

T

P3∧p0

P0∧p4

**T**↔ p1

(**T** ↔ p1) ∨ p3

(p3∧p0)∨(p0∧p4)

((p3 ∧ p0) ∨ (p0 ∧ p4)) → ((**T** ↔ p1) ∨ p3)

Calculemos, então, o valor que v atribui a cada uma delas:

1. v(p0) = V (dado)
2. v(p1)= F (dado)
3. v(p3)= F (dado)
4. v(p4)= V (dado)
5. v(T)= V, pela cláusula (i)
6. v(p3∧p0)= F, pela cláusula (iv), visto que v(p3)= F (item III)
7. v(p0∧p4)= V, pela cláusula (iv), visto que v(po)= v(p4) = V (itens I e IV)
8. v(**T**↔ p1)=F, pela cláusula (vii), visto que v(p1)= F e v(T)= V (itens II e V)
9. v((**T**↔ p1) ∨ p3) = F, pela cláusula (v), visto v(**T**↔ p1)=F, bem como v(p3)= F (itens VIII e III)
10. v( (p3∧po)∨(p0∧p4) )= V, pela cláusula (v), visto que v(p0∧p4)= V (item VII)
11. v( ((p3 ∧ p0) ∨ (p0 ∧ p4)) → ((**T**↔ p1) ∨ p3) )= F, pela cláusula (vi), visto que v((**T**↔ p1) ∨ p3) = F (item IX), embora v( (p3∧p0)∨(p0∧p4) )= V (item X).

## Exercícios

### Grupo A

1. Considere a valoração booleana referida no texto (aquela que atribui o falso às letras sentenciais de índice impar e apenas a essas). Determine, então, os valores que essa valoração atribui às fórmulas seguintes:
2. ¬p0
3. p1 → p2
4. p1 ∨ p2
5. p1 ∧ p2
6. p0 ↔ p1
7. ¬p0 ↔ (po →**⊥**)
8. p0 ↔ (po →**T**)
9. p1 → (p1 ∨ p2)))
10. ¬(p0 → p0 ∨ p1)
11. ¬(p0 ↔ ¬p0)
12. p0 →(¬p0 → p1 ∧ p2)
13. (p0 ↔ (¬p1 → (p1 ∨ p2))

### Grupo B

1. Demonstre as duas posições enunciadas no texto.
2. Mostre que, para qualquer fórmula **A,** não contendo ocorrências do símbolo para a negação e qualquer valoração v, v(A) = V, se v atribuir V a todas as letras sentenciais que ocorrem em **A**.
3. Considere apenas as fórmulas escritas com letras sentenciais recorrendo no máximo a negações e bicondicionais. Ademais, para cada valoração booleana v e cada fórmula A, seja nv(A) o número de ocorrências de negações somado ao número de ocorrências em A das letras sentencias às quais v atribui o valor F. Mostre que, para qualquer valoração booleana v, v(A) é o V se e apenas se vn(A) for ou zero ou um número par.

**Solução**. Demonstre por indução na complexidade de A.

1. A é atômica. Nesse caso, v(A) é o V se e apenas se nv(A) for zero (isto é, par, na acepção alargada de par).
2. A é B ↔ C. Nesse caso, v(A) é o V se e apenas se v(B) = v(C) (ou seja, ambas verdadeiras ou ambas falsas) e, por hipótese da indução, isso ocorre se e apenas se o nv de ambos forem pares ou o de ambos forem ímpares ou seja se apenas se nv (A) for par.
3. A é ¬B . Segue da hipótese de indução, e definição de verdade uma vez que somar um a um número impar resulta em um par.

### Definição dos conceitos lógicos fundamentais.

#### Consistência e Validade

De posse da noção de valoração booleana, é matéria fácil caracterizar as noções lógicas fundamentais com respeito à linguagem da LPC. Consideremos, de maneira mais detalhada, inicialmente os conceitos que se aplicam a fórmulas isoladas. Dizemos que uma fórmula é **proposicionalmente consistente** se existir uma valoração booleana que lhe atribui o valor verdadeiro e ela se diz **proposicionalmente válida** se for verdadeira em qualquer valoração booleana. E comum que as fórmulas proposicionalmente válidas sejam denominadas tautologias; mais ainda, essa se tornou a denominação canônica, razão pela qual vamos aqui também empregar.[[2]](#footnote-2)

Visto que, como anteriormente assinalado, o valor de verdade de uma fórmula numa valoração booleana é univocamente determinado pelo valor que suas letras sentenciais assumem nessa valoração, podemos oferecer um procedimento de decisão para as noções ora introduzidas. Por um lado, como mostramos antes, o valor que uma valoração qualquer atribui a uma fórmula qualquer, pode ser calculado a partir dos valores de verdade que tal valoração booleana atribui às letras sentenciais que ocorrem na fórmula, Por outro, como cada fórmula contém ocorrências de um número finito (incluindo o zero) de letras sentenciais, o número de diferentes distribuições de valores de verdade para essas letras sentenciais é finito (mais precisamente, por análise combinatória, se n for o número de letras sentenciais, 2n é o número de distintas distribuições de valores de verdade). Assim, podemos calcular todos os valores (em número finito) que as (infinitas) valorações booleanas podem atribuir a uma dada fórmula.

Esse procedimento pode ser representado por uma tabela, conhecida como tabela de verdade, cujas colunas são indexadas pelas subfórmulas de uma dada fórmula, dispostas de maneira a respeitar a complexidade delas (ou seja, fórmulas mais simples devem vir antes de fórmulas mais complexas) e cujas células contém um valor de verdade, distribuídas de tal modo que cada linha representa uma possibilidade distinta de distribuição de valores de verdade e em conjunto exaurem todas as possibilidades. Outra vez, um exemplo ajuda a compreender o ponto: consideremos a fórmula:

((p2 ∧ p0) ∨ (po ∧ p1) ) → (**T** ↔ p1)

Ela contém ocorrências de três letras sentenciais distintas e possuí nove subfórmulas, quais sejam:

p0

p1

p2

T

P2∧p0

P0∧p1

**T**↔ p1

(p2∧p0)∨(p0∧p1)

((p3 ∧ p0) ∨ (p0 ∧ p1)) → (**T**↔ p1)

Assim, nossa tabela deverá ter nove linhas (23 mais a linha do cabeçalho) e nove colunas e ficará assim:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p0 | p1 | p2 | T | P2∧p0 | P0∧p1 | **T**↔ p1 | (p2∧p0)∨(p0∧p1) | ((p2 ∧ p0) ∨ (p0 ∧ p1)) → (**T**↔ p1) |
| V | V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | F | V | V | V | V |
| V | F | V | V | V | F | F | V | F |
| V | F | F | V | F | F | F | F | V |
| F | V | V | V | F | F | V | F | V |
| F | V | F | V | F | F | V | F | V |
| F | F | V | V | F | F | F | F | V |
| F | F | F | V | F | F | F | F | V |

## Exercícios

1. Seja A uma fórmula na qual ocorrem apenas letras sentenciais e no máximo negações e bicondicionais. Assim, A é uma tautologia se e apenas se a negação e cada letra sentencial que ocorrem nela ocorrerem um número par de vezes.

**Solução**. Se A contém um número par de ocorrências da negação (eventualmente nenhuma ocorrência de negação) e se cadaletra sentencial que ocorre nela ocorre um número par de vezes, então, em particular, o número de ocorrências de letras sentenciais nela que recebem o valor F numa dada valoração também será par. Assim, decorre do resultado enunciado em um dos exercícios da lista anterior, que a fórmula é uma tautologia. Por outro lado, se alguma letra sentencial ocorre um número impar de vezes na fórmula em pauta, basta considerarmos a valoração que atribui o F apenas a essa letra sentencial, pois pelo mesmo resultado referido anteriormente, essa valoração dará o valor F à fórmula como um todo, mostrando que não se trata de tautologia.

1. Usando o método de tabelas de verdade, determine quais das fórmulas abaixo são tautologias:
2. ¬p0 ↔ (po →**⊥**)
3. p0 ↔ (po →**T**)
4. p1 → (p1 ∨ p2)))
5. ¬(p0 → p0 ∨ p1)
6. ¬(p0 ↔ ¬p0)
7. p0 →(¬p0 → p1 ∧ p2)
8. (p0 ↔ (¬p1 → (p1 ∨ p2))

1. Em (MATES, 1972) as sentenças do cálculo sentencial são um caso particular de sentenças (aquelas que não contêm ocorrências de símbolos individuais, variáveis ou constantes); caracterização que se encontra já em (HILBERT e BERNAYS, 1934), mas com mais cuidados, o uso de conectivos na formação de fórmulas abertas é introduzido como uma peculiar extensão do uso deles como formadores de sentenças complexas a partir de sentenças mais simples. [↑](#footnote-ref-1)
2. Essa denominação das fórmulas válidas em função apenas de suas estruturas proposicionais foi tomada Tractatus Logico-philosophicus, obra na qual ela veicula, consoante o significado ordinário da palavra tautologia (dizer o mesmo, nada dizer), uma peculiar compreensão da natureza das proposições logicamente verdadeiras (como proposições sem sentido, vazias de sentido). Mas a denominação foi incorporada no jargão lógico contemporâneo insciente de seu significado prévio na lingua. [↑](#footnote-ref-2)